§8: Zusammenhängende und homöomorphe Räume (Topologie)

1

<u>Topologie:</u> Im Grossen und Ganzen: Alles, was mit Stetigkeit zu tun hat. Die Topologie ist ein wichtiges Gebiet der Mathematik, fast so wichtig wie Algebra. Wurde im Laufe des 20. Jahrhunderts entwickelt.

Der Einfachheit halber werden in diesem § nur Teilräume X des $\mathbb{R}^n$ betrachtet ($n \in \mathbb{N}^*$).

<u>Wiederholung</u>

<u>Def:</u> Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X heisst

- offen, wenn $\forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0$ sodass $\forall y \in \mathbb{R}^n: \|y-x\| < \varepsilon \Rightarrow y \in X$.
- abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist.
- beschränkt, wenn $\exists M > 0$ mit $\|x\| \leq M \quad \forall x \in X$.
- kompakt, wenn X beschränkt und abgeschlossen ist.

<u>Satz 8.1:</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

K ist kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge (x_n) aus K besitzt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $x \in K$ konvergiert. $\square$

<u>Def:</u> Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in X$.

i) $f: X \to Y$ heisst stetig in a wenn

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ sodass $\forall x\in X$: $\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$.

ii) $f: X\to Y$ heißt stetig wenn f in jedem Punkt aus X stetig ist.

<u>Bem</u>: Sei $f: X\to Y$, $f=(f_1,\dots,f_m)$.

f ist stetig $\Leftrightarrow$ f_k ist stetig $\forall k\leq m$. $[f_k: X\to\mathbb{R}]$

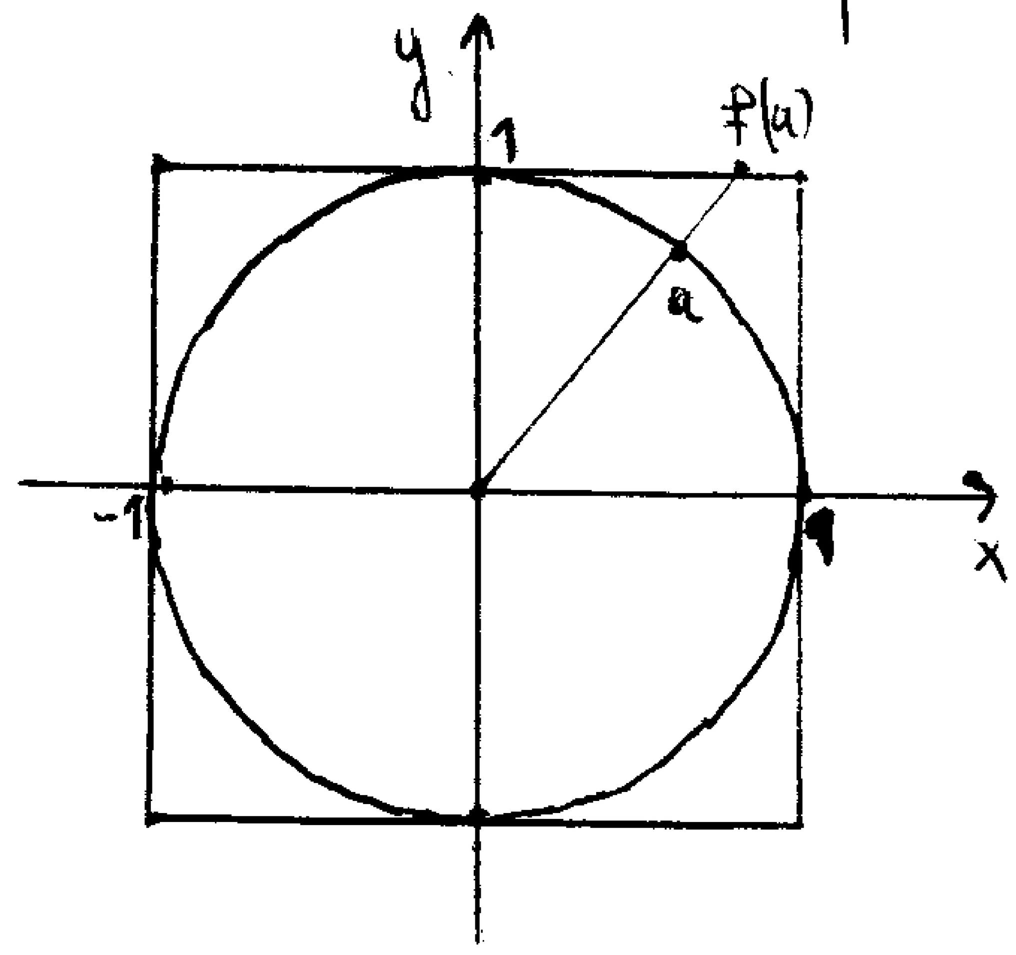
<u>Def</u>: Seien $X\subseteq\mathbb{R}^n$ und $Y\subseteq\mathbb{R}^m$.

X und Y heißen <u>homöomorph</u> wenn es eine bijektive stetige Abbildung $f: X\to Y$ existiert, deren Umkehrabbildung $f^{-1}: Y\to X$ stetig ist.

Eine solche Abbildung $f: X\to Y$ heißt <u>Homöomorphismus</u> zwischen X und Y.

<u>Beispiele</u>:

i) $S^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ und $Q := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x=\pm 1 \wedge |y|\leq 1) \vee (y=\pm 1 \wedge |x|\leq 1)\}$ sind homöomorph.

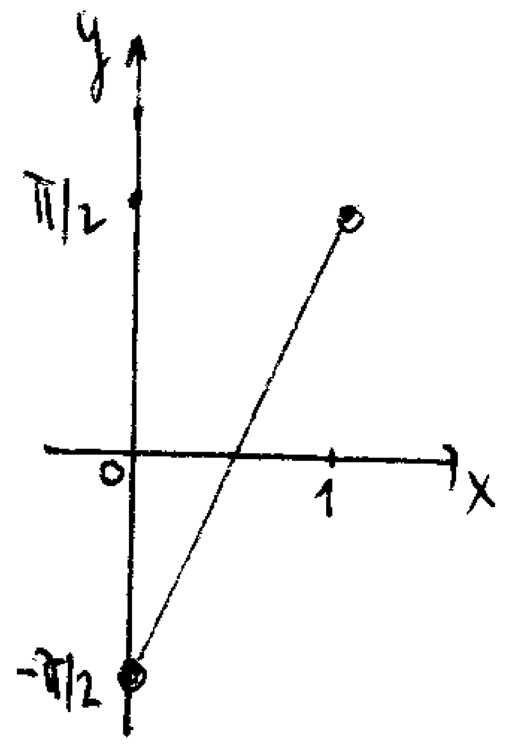


Die radiale Projektion $S^1 \to Q$, $a \mapsto f(a)$ ist ein Homöomorphismus zwischen S^1 und Q.

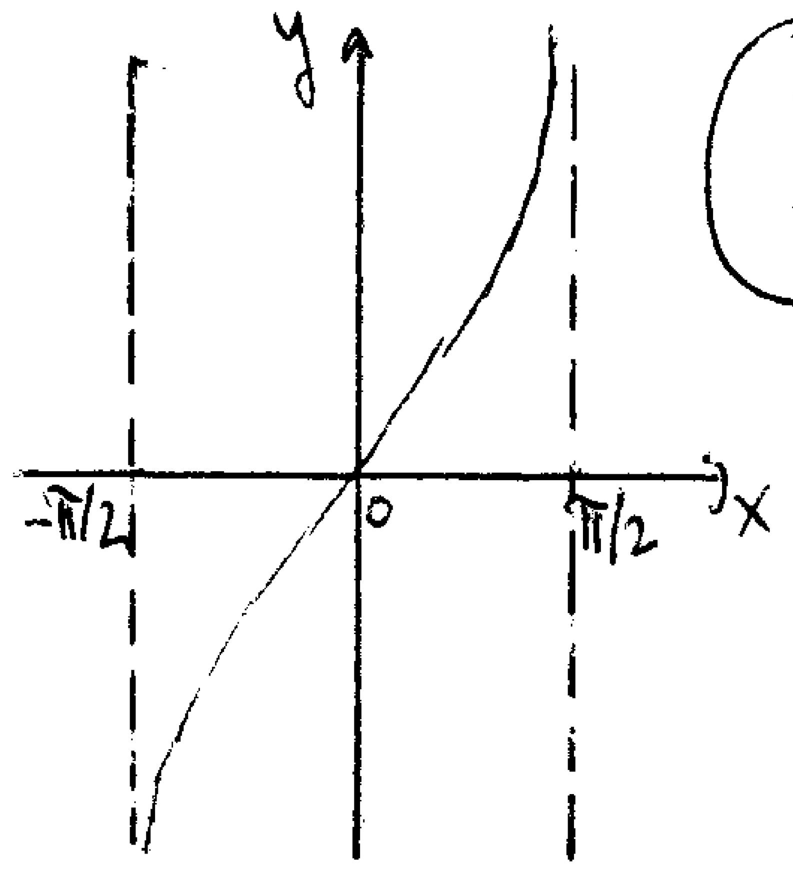
ii) Die Intervalle $]0,1[$ und $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sind homöomorph:

$f:]0,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ist ein Homöomorphismus.

$x \longmapsto -\frac{\pi}{2}+\pi x$

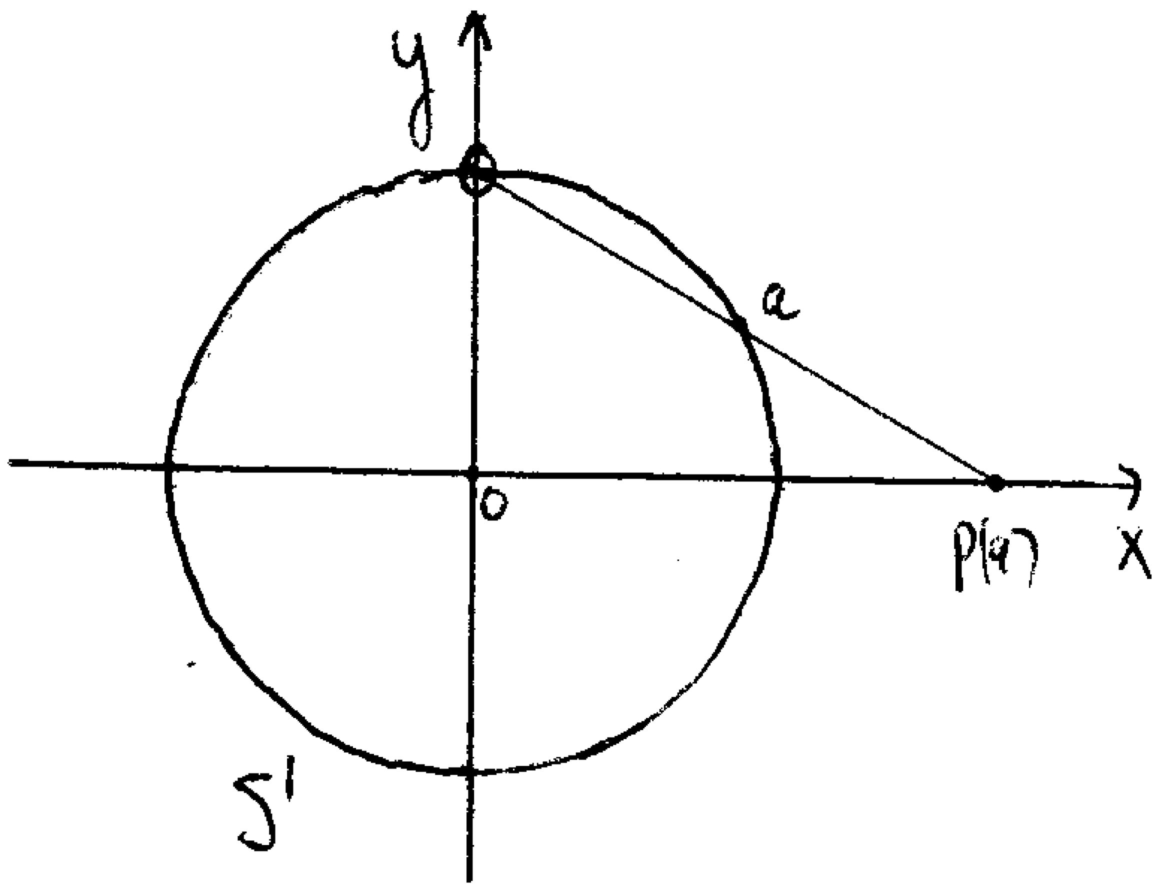


iii) $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\mathbb{R}$ sind homöomorph:



$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus.
$x \longmapsto \tan(x)$

iv) $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ und $\mathbb{R}$ sind homöomorph:



Die stereografische Projektion
$p: S^1 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus.
$a \longmapsto p(a)$

<u>Lemma 8.2:</u> Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $Z \subseteq \mathbb{R}^k$. Dann:

a) X ist homöomorph zu X.

b) X, Y homöomorph $\Rightarrow$ Y, X homöomorph.

c) (X, Y homöomorph und Y, Z homöomorph) $\Rightarrow$ X, Z homöomorph.

D

Nach 8.2 ist die Relation "homöomorph zu" eine Äquivalenzrelation.
Aus den Beispielen ii) und iii) folgt dass $]0,1[$ und $\mathbb{R}$ homöomorph sind.

<u>Lemma 8.3:</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Dann ist $\mathrm{Im}(f) = f(K)$ kompakt.

<u>Beweis:</u> Mithilfe des Satzes 8.1.

Sei (y_n) eine Folge aus $f(K)$. $y_n \in f(K) \Rightarrow \exists x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$.
(x_n) ist eine Folge aus $K \overset{8.1}{\Longrightarrow}$ es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aus (x_n), die gegen einen $x \in K$ konvergiert. $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty) \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$
$\underbrace{f(x_{n_k})}_{= y_{n_k}} \to f(x) \in f(K) \ (k \to \infty)$. Also ist $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge aus (y_n),

die gegen $y := f(x) \in f(K)$ konvergiert. Nach 8.1 ist $\mathrm{Im}(f) = f(K)$ kompakt. □

Korollar 8.4: Seien X, Y homöomorph, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann:

$$X \text{ ist kompakt} \iff Y \text{ ist kompakt.}$$

□

Beispiele: i) $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ sind nicht homöomorph denn $[0,1]$ ist kompakt und $\mathbb{R}$ nicht.

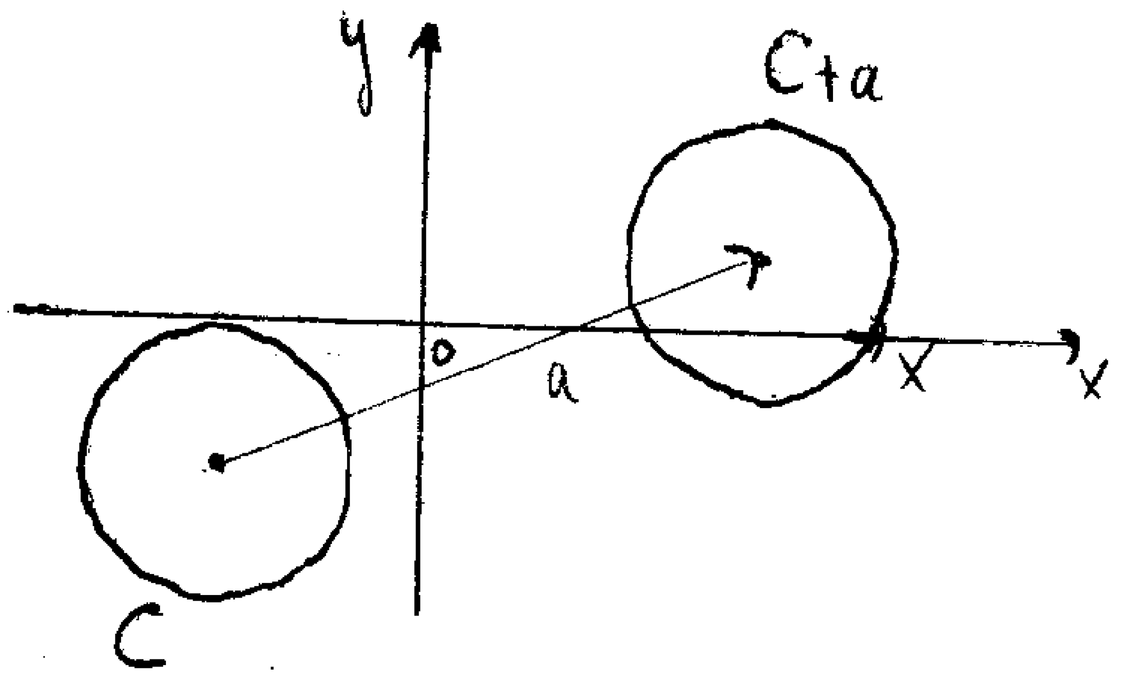
ii) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht homöomorph denn S^n ist kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht.

Lemma 8.5: Sei $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Sei $C \subseteq X$. Dann ist $f|_C : C \to f(C)$ ein Homöorphismus zwischen C und $f(C)$. □

Beispiele:

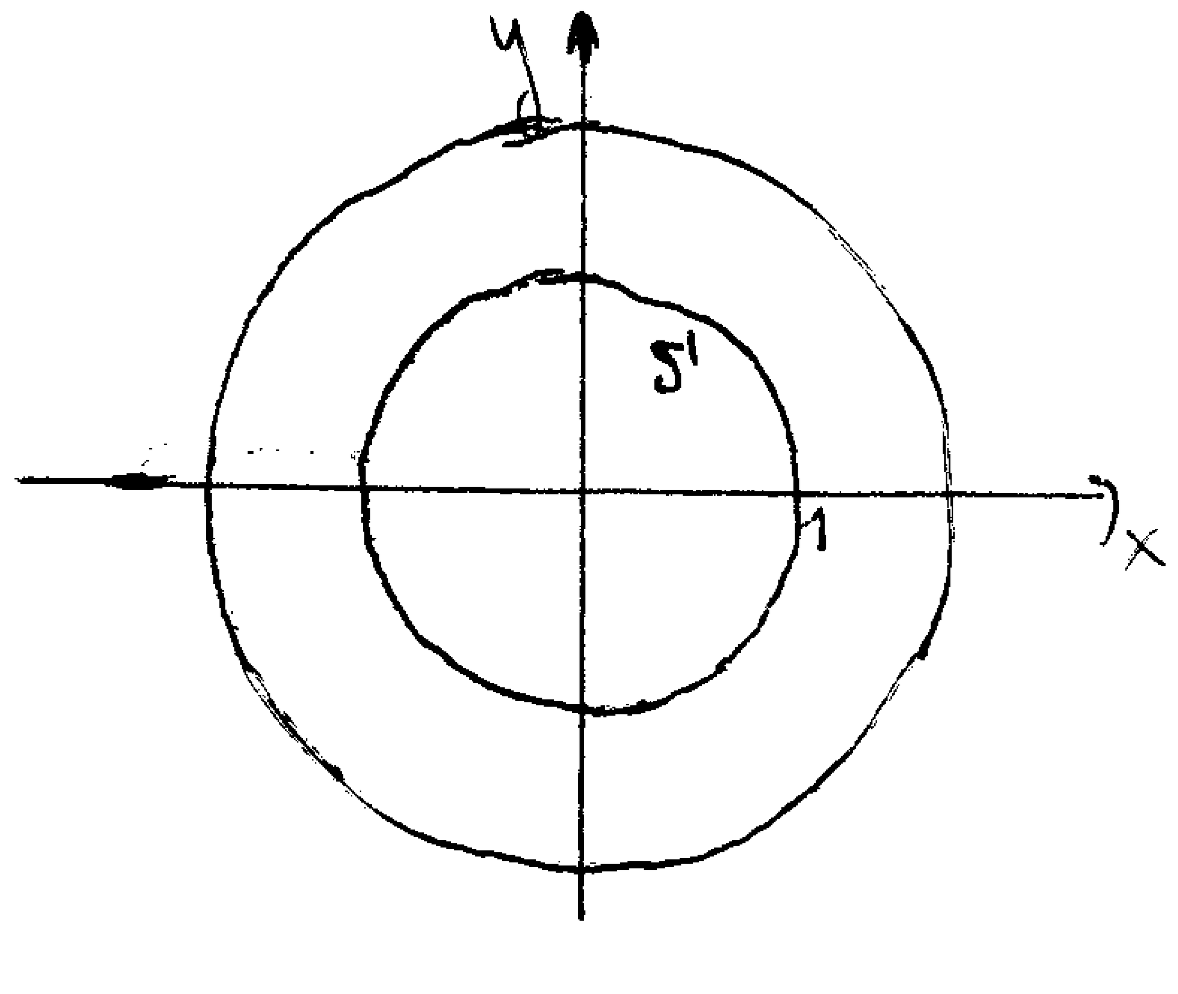
i) Jede Verschiebung $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto x+a\end{array}$ ist ein Homöomorphismus.

Wenn (z.B.) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis ist, dann sind C und $C+a$ homöomorph.



ii) Jede zentrische Streckung $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_\lambda} \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \lambda x\end{array}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$ ist ein Homöomorphismus.

Daraus folgt: Für jedes $\lambda > 0$ sind S^1 und $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = \lambda\}$ homöomorph.



Aus i) und ii) folgt: Zwei beliebige Kreise in der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind immer homöomorph.

Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ homöomorph?

Def: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Seien $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg in X von x_0 nach x_1 ist eine stetige Abbildung $c: [0,1] \to X$ mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$.

b) X heißt wegzusammenhängend falls es für jedes Paar von Punkten x_0, x_1 aus X einen Weg $c: [0,1] \to X$ von x_0 nach x_1 existiert.

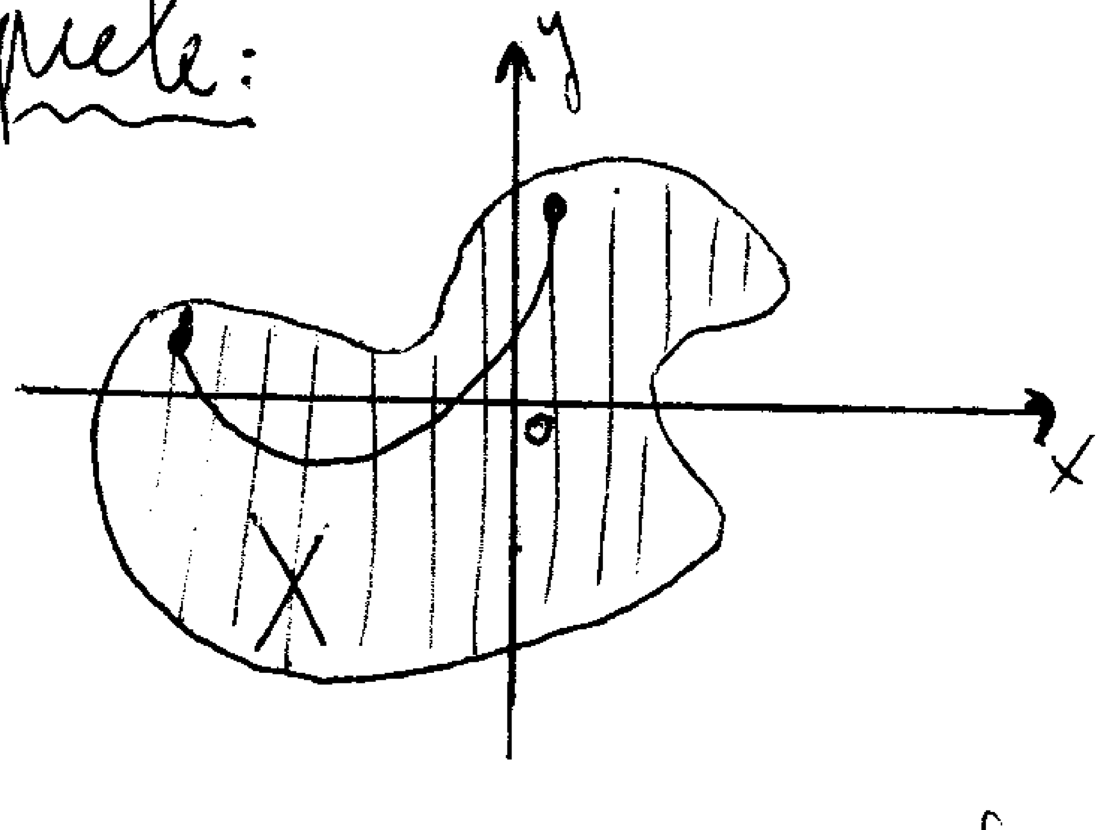
c) X heißt zusammenhängend falls es nicht möglich ist, ihn in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen der Form $X \cap U$ und $X \cap V$ zu zerlegen, mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Anders gesagt: Für alle $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $X = (X \cap U) \cup (X \cap V)$ und $(X \cap U) \cap (X \cap V) = \emptyset$ gilt $X \cap U = \emptyset$ oder $X \cap V = \emptyset$

[Intuition: X (weg)zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X besteht nur aus einem Stück.]

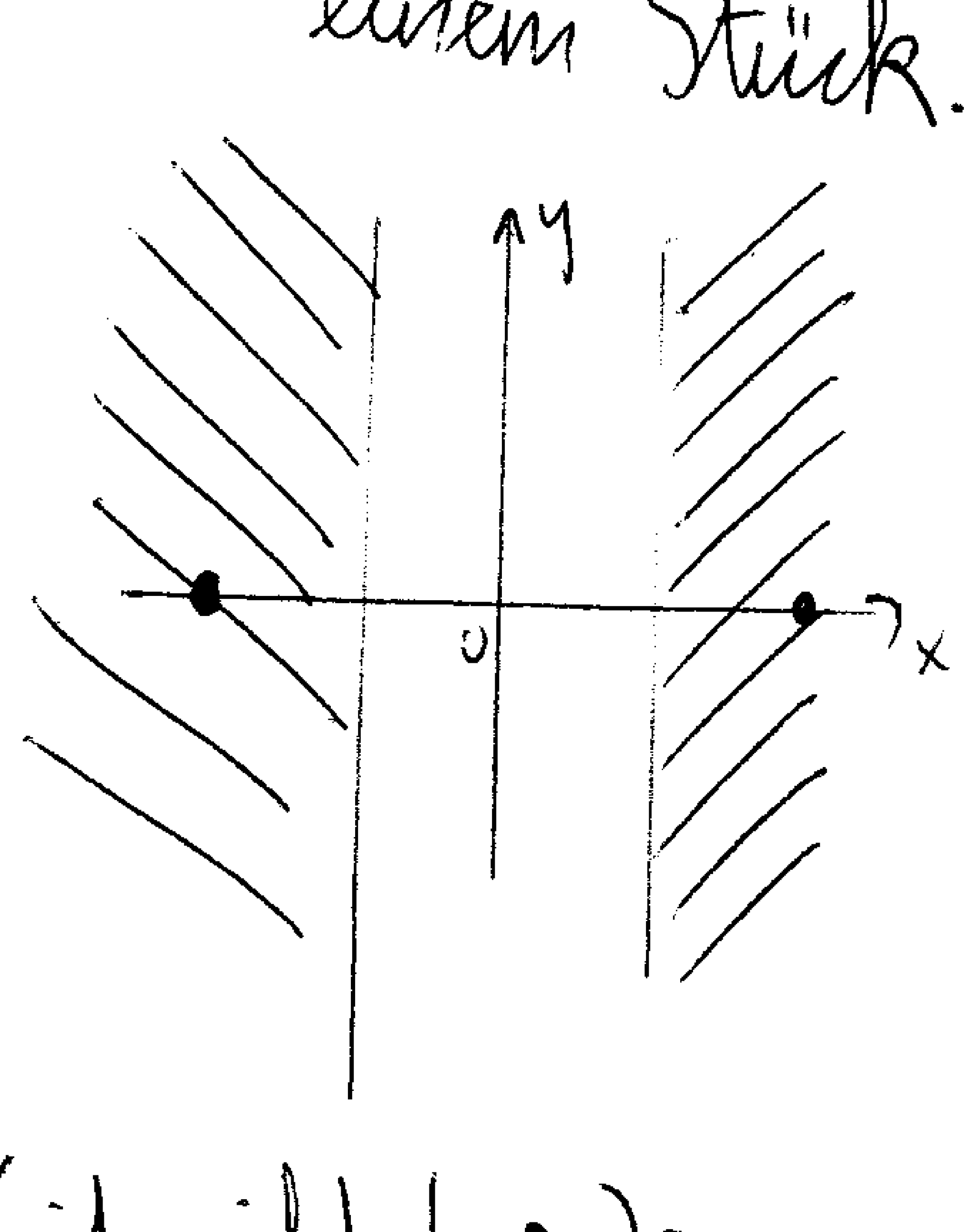
Beispiele:

i)



X ist (weg)zusammenhängend

ii)



X ist nicht (weg)zusammenhängend.

Lemma 8.6: Sei $f: X \to Y$ stetig, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann:

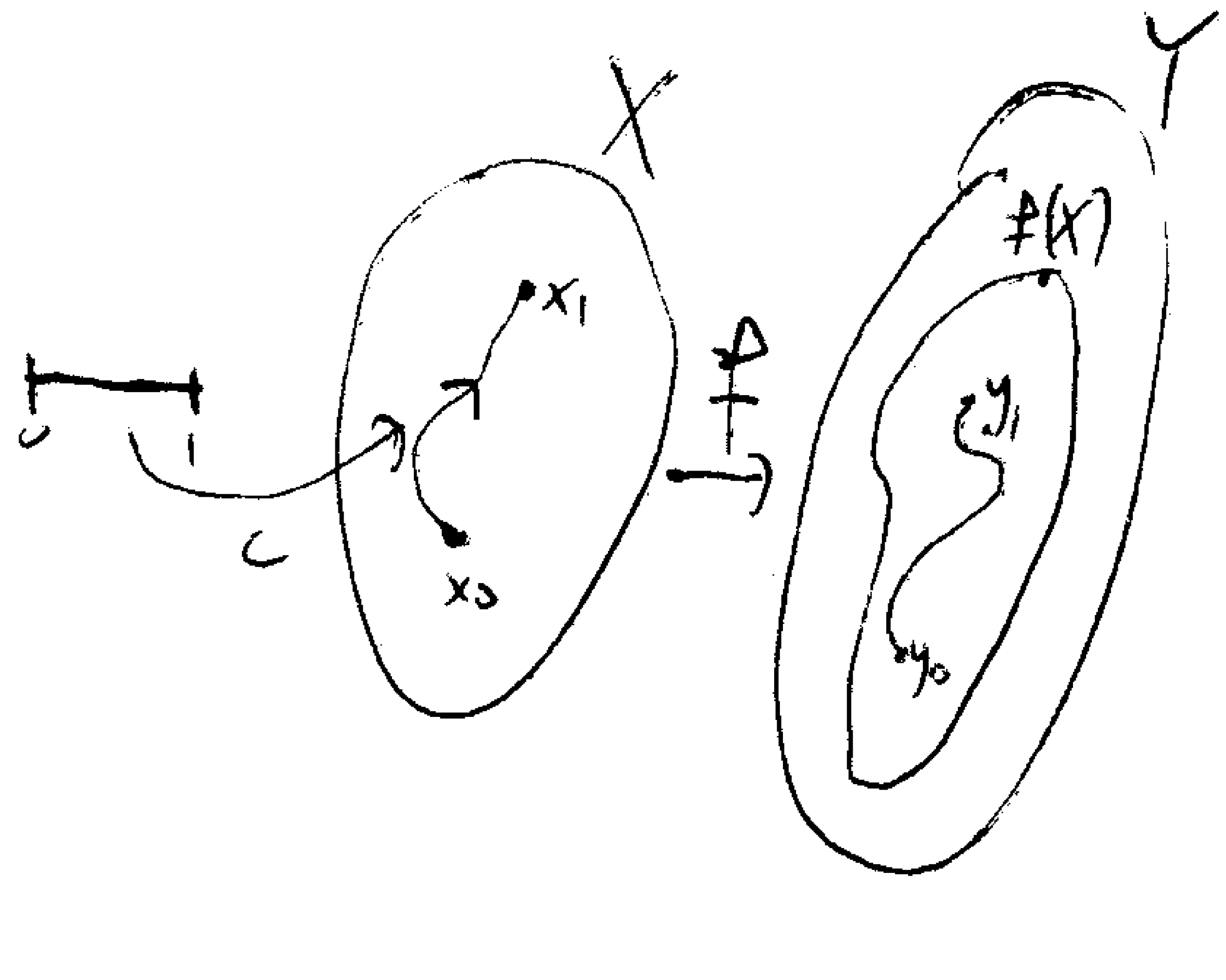
a) X wegzusammenhängend $\Rightarrow f(X)$ wegzusammenhängend.

b) X zusammenhängend $\Rightarrow f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: Zu a): Seien $y_0, y_1 \in f(X)$.

Seien $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$.

Sei $c: [0,1] \to X$ ein Weg mit $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.



Dann ist $f \circ c: [0,1] \to f(X)$ stetig und

$(f \circ c)(0) = f(x_0) = y_0$, $(f \circ c)(1) = f(x_1) = y_1$.

$\square$

Korollar 8.7: Sei $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann:

- X ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow Y$ ist wegzusammenhängend.
- X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow Y$ ist zusammenhängend.

$\square$

Lemma 8.8: Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann:

X ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow X$ ist ein Intervall $\Leftrightarrow X$ ist zusammenhängend. $\square$

Lemma 8.9: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann:

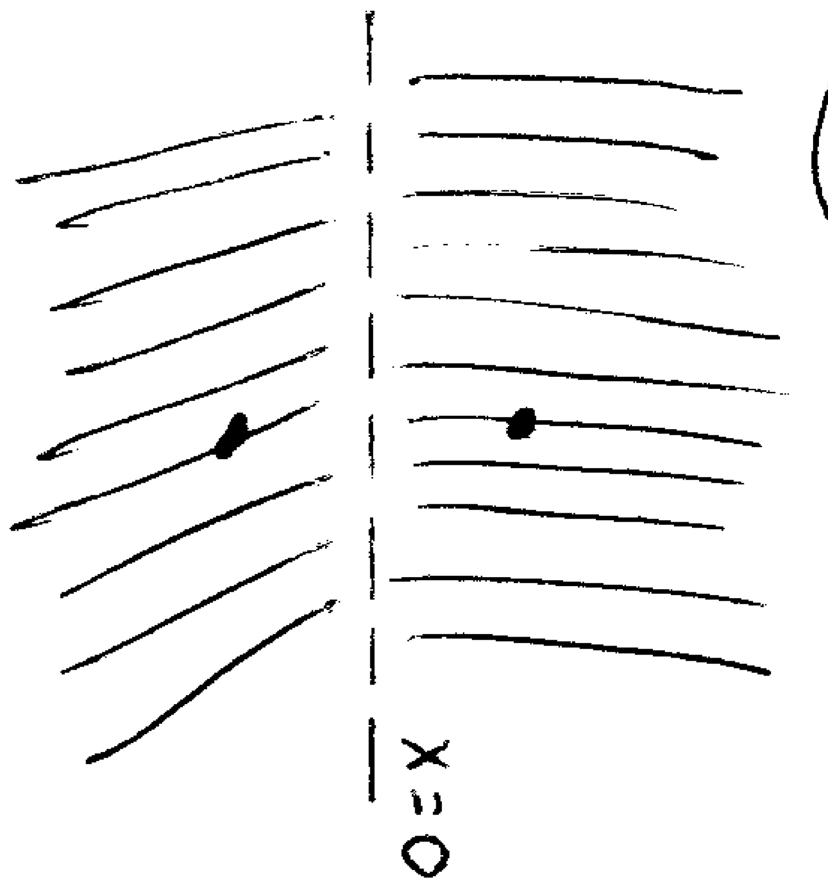
X ist wegzusammenhängend $\Rightarrow X$ ist zusammenhängend.

Die Umkehrung ist falsch, gilt aber "fast immer". $\square$

Beispiele:

i) Sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

Wir zeigen, dass X weder wegzusammenhängend noch zusammenhängend ist.



- Ang, X ist wegzusammenhängend.

  Sei $c: [0,1] \to X$ stetig mit $c(0)=(-1,0)$ und $c(1)=(1,0)$. Sei $c=(c_1,c_2)$.

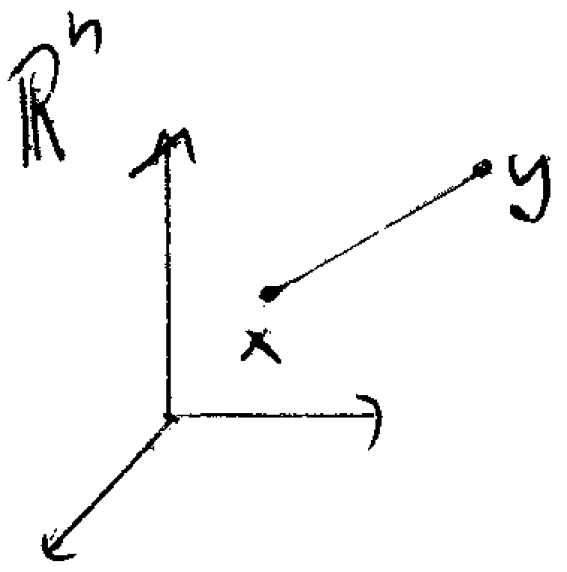
  Also ist $c_1: [0,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig und $c_1(0)=-1$, $c_1(1)=1$.

  Nach dem ZWS gibt es ein $t \in]0,1[$ mit $c_1(t)=0$ ↯ X ist nicht wegzusammenhängend.

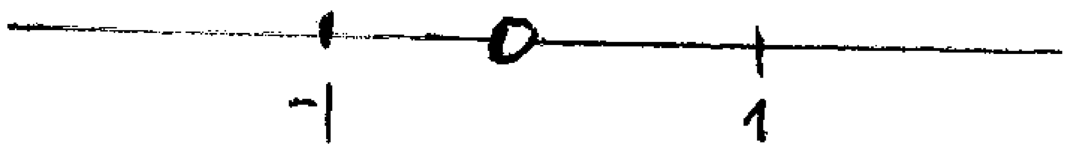
- Seien $U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, $V:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$. $U,V\subseteq\mathbb{R}^2$ sind offen, $X=(X\cap U)\cup(X\cap V)$, $(X\cap U)\cap(X\cap V)=\emptyset$ und $X\cap U\neq\emptyset\neq X\cap V$. Daher ist X nicht zusammenhängend.

ii) $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend:

Seien $x,y\in\mathbb{R}^n$. Sei $c: [0,1]\to\mathbb{R}^n$, $c(t)=x+t(y-x)$.
c ist stetig, $c(0)=x$, $c(1)=y$.

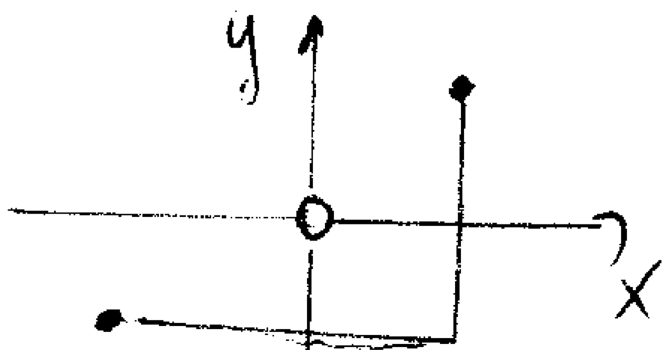


iii) $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist wegzusammenhängend $\iff n\geq 2$.

- $n=1$. 

Kein Weg in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zwischen -1 und 1.

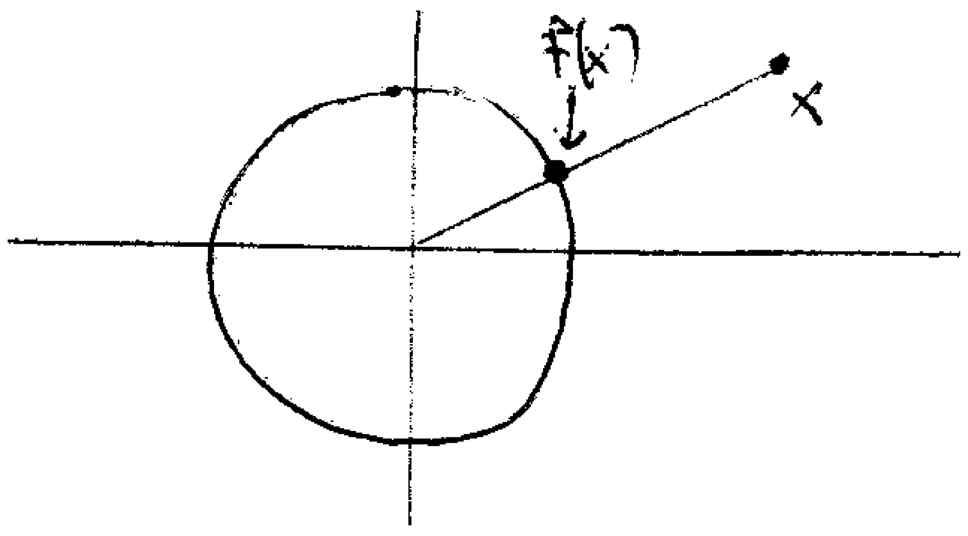
- $n\geq 2$. Das geht denn es gibt genug Platz.



iv) $S^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$ ist wegzusammenhängend für $n\geq 1$.

Begründung: Sei $f: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to S^n$.

$$x \longmapsto x/\|x\|$$

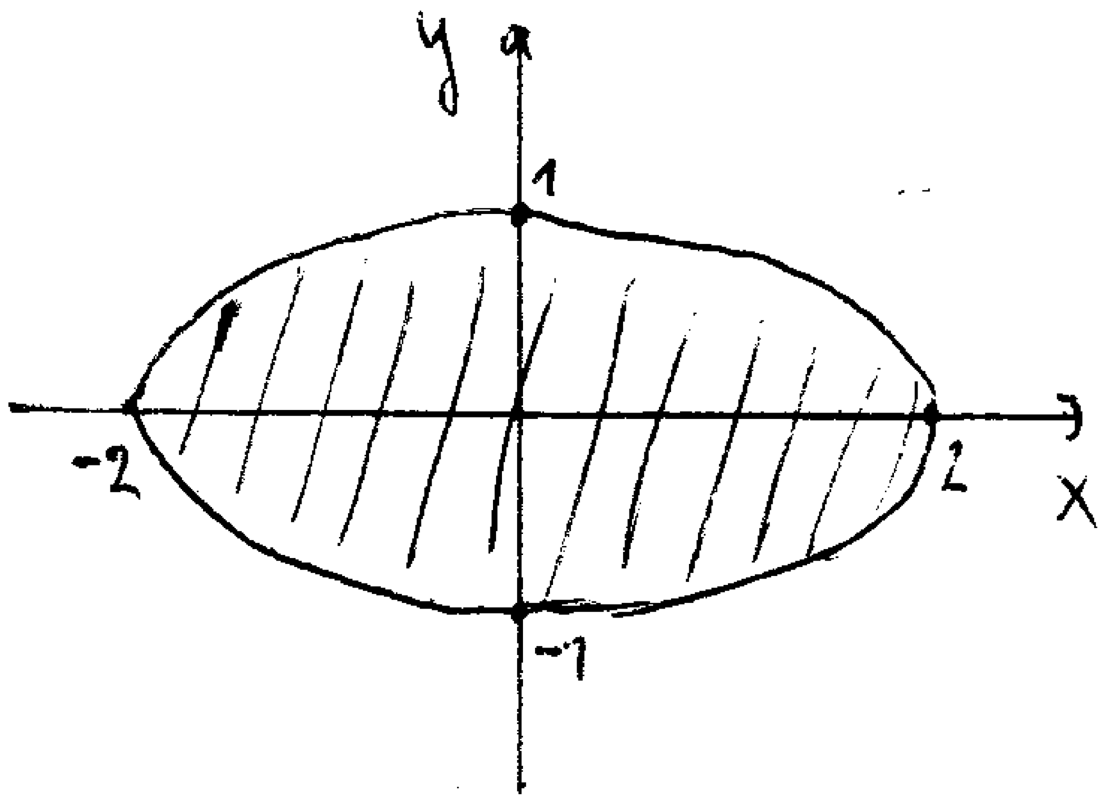


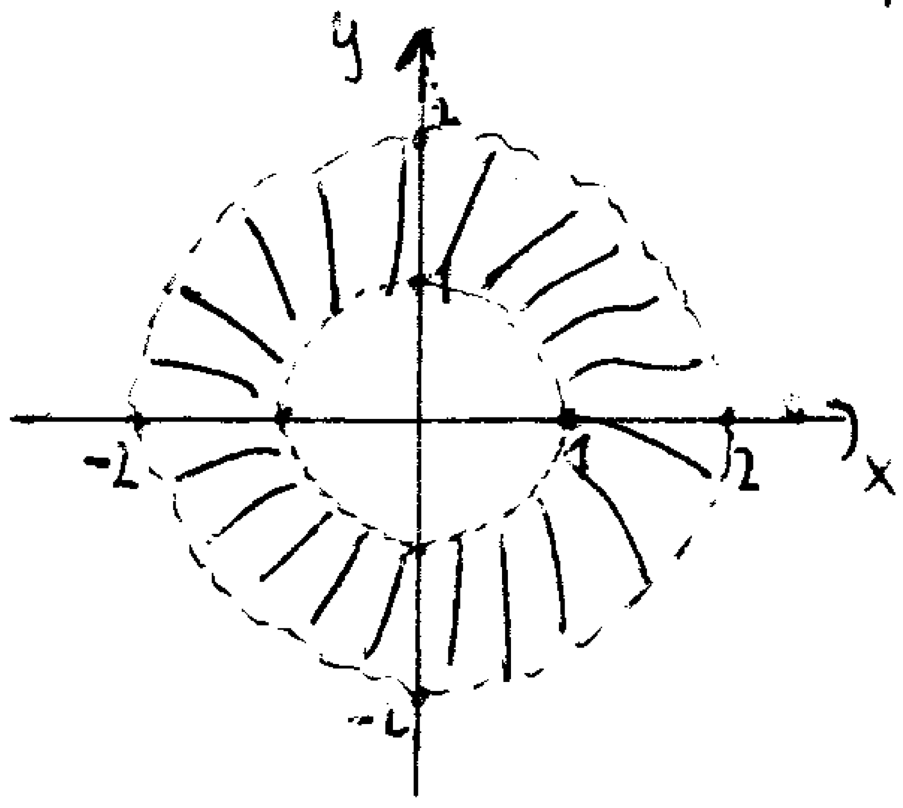
f ist stetig und $\mathrm{Im}(f)=S^n$.

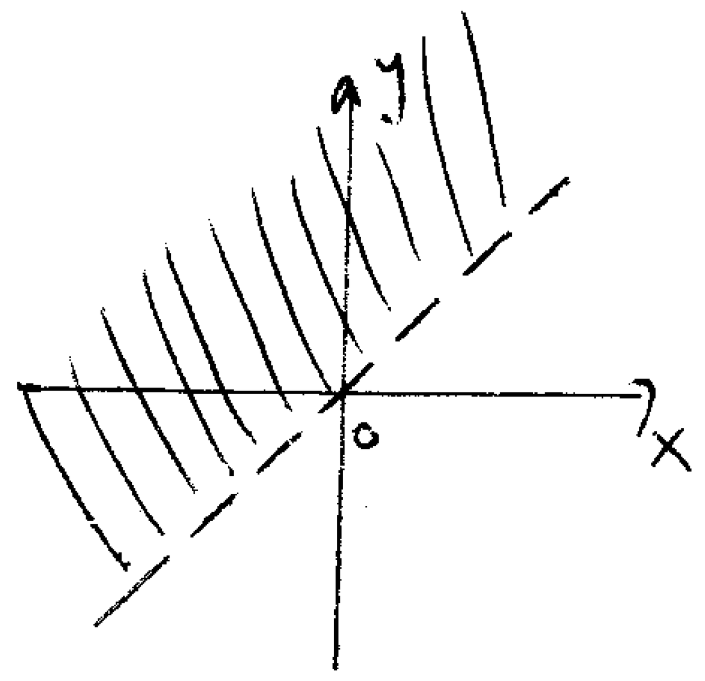
$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend $\overset{8.6a)}{\Longrightarrow}$ S^n wegzusammenhängend.

v) Folgende Räume sind wegzusammenhängend:

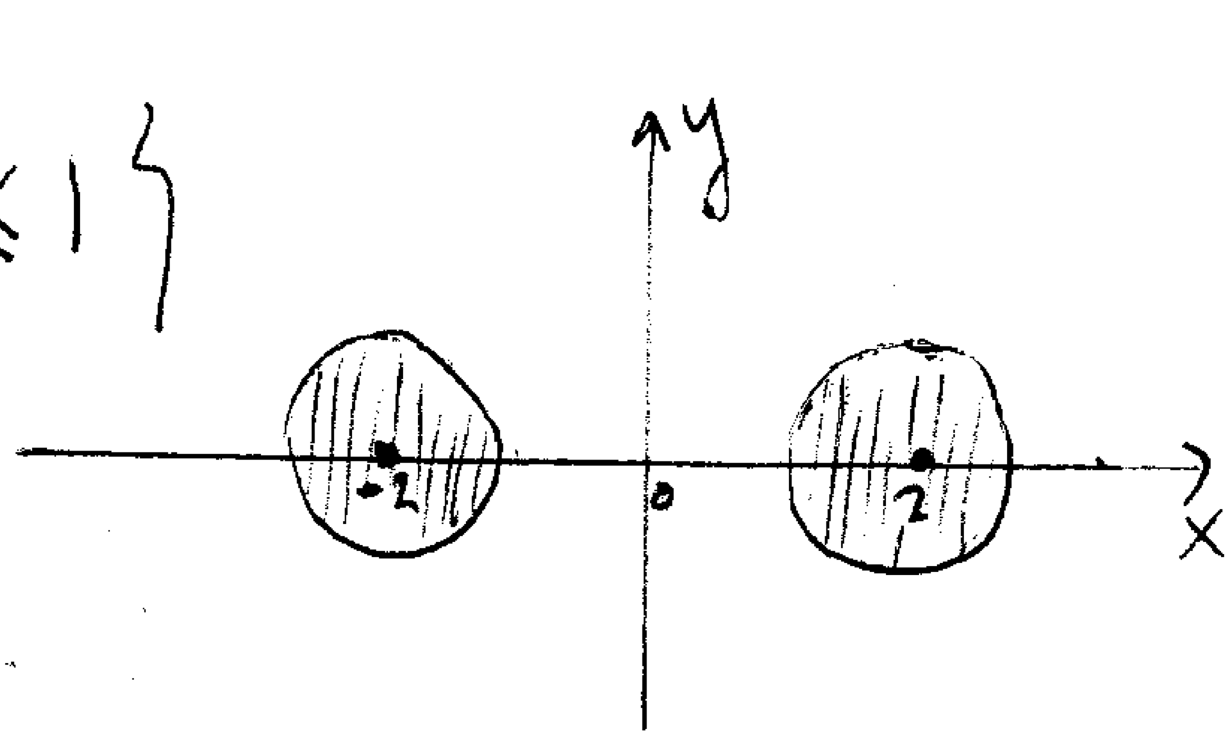
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1\right\}$, $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1<x^2+y^2<4\right\}$, $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y>x\right\}$.







vi) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2+y^2\leq 1\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+2)^2+y^2\leq 1\right\}$
ist nicht wegzusammenhängend.



Matrizenräume

Man kann auf eine natürliche Weise $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathbb{R}^{2n^2}$ identifizieren:

$$\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11},\dots,a_{1n},\dots\dots,a_{n1},\dots,a_{nn}).$$

$$\mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}$$

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (\mathrm{Re}(z_{11}),\mathrm{Im}(z_{11}),\dots,\mathrm{Re}(z_{1n}),\mathrm{Im}(z_{1n}),\dots\dots,\mathrm{Re}(z_{n1}),\mathrm{Im}(z_{n1}),\dots,\mathrm{Re}(z_{nn}),\mathrm{Im}(z_{nn})).$$

Mit diesen Identifikationen machen Sinn für Matrizenräume die Begriffe Kompaktheit, Zusammenhang, stetige Abbildungen,...

Def (Wdh)

$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$ (allgemeine lineare Gruppe)

$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = E_n\}$ (orthogonale Gruppe)

$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ (spezielle orthogonale Gruppe)

$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$ (allgemeine lineare Gruppe)

$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A\cdot \bar{A}^T = E_n\}$ (unitäre Gruppe)

$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$ (spezielle unitäre Gruppe)

vii) $O(n)$ ist nicht wegzusammenhängend.

Widerspruchsbeweis: [Bekannt: $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$]

Seien $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ und $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. $A_0, A_1 \in O(n)$, $\det(A_0) = 1$, $\det(A_1) = -1$.

Sei $c: [0,1] \to O(n)$ stetig mit $c(0) = A_0$ und $c(1) = A_1$.

Wir betrachten die Komposition

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "c"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & O(n) \arrow[r, "\det"] & \{-1,1\} \end{tikzcd}.$$

$\det: O(n) \to \{-1,1\}$ ist stetig [$\det(A)$ hängt polynomial von den Koeffizienten aus A ab] $\Rightarrow$ f ist stetig. $f(0) = \det(c(0)) = \det(A_0) = 1$ und $f(1) = \det(c(1)) = \det(A_1) = -1$.

Also ist $f: [0,1] \to \{-1,1\}$ stetig, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$.

$[0,1]$ wegzusammenhängend $\overset{8.6a)}{\Rightarrow}$ $f([0,1]) = \{-1,1\}$ ist wegzusammenhängend ↯

viii) $U(n)$ ist wegzusammenhängend.

Sei $A \in U(n)$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in U(n)$.

Sei $U \in U(n)$ mit $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Die λ_k sind die Eigenwerte von A und sind in S^1. Also $\lambda_k = e^{i t_k}$, $t_k \in [0, 2\pi[$ [s. LinA II]

Daraus folgt

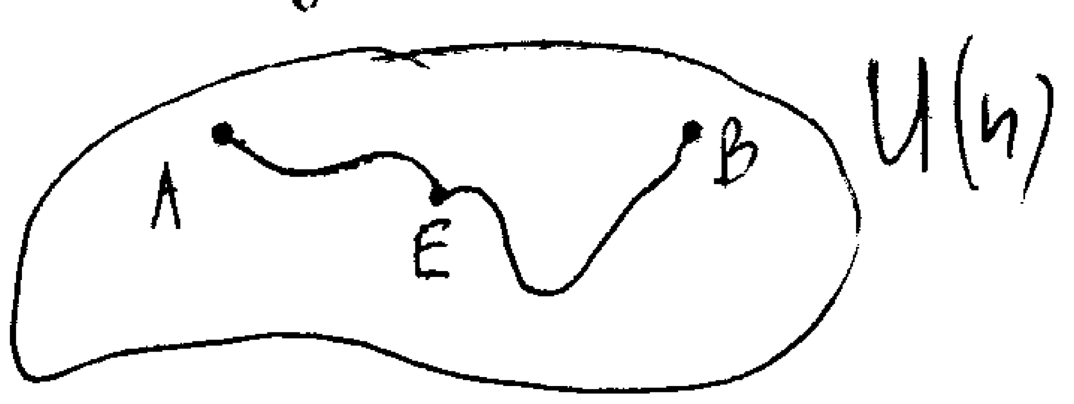
$$A = U \begin{pmatrix} e^{it_1} & & & 0 \\ & e^{it_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{it_n} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Sei $c: [0,1] \to U(n)$ definiert durch $c(t) = U \begin{pmatrix} e^{itt_1} & & & 0 \\ & e^{itt_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{itt_n} \end{pmatrix} U^{-1}$.

c ist stetig, $c(0) = UU^{-1} = E$, $c(1) = A$.

Damit ist gezeigt, dass es einen Weg in $U(n)$ zwischen A und E gibt.

Für $A, B \in U(n)$ beliebig:



$\square$

Satz 8.10:

a) $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht homöomorph wenn $n \neq m$.

b) S^n und S^m sind nicht homöomorph wenn $n \neq m$. $(n, m \in \mathbb{N}^*)$

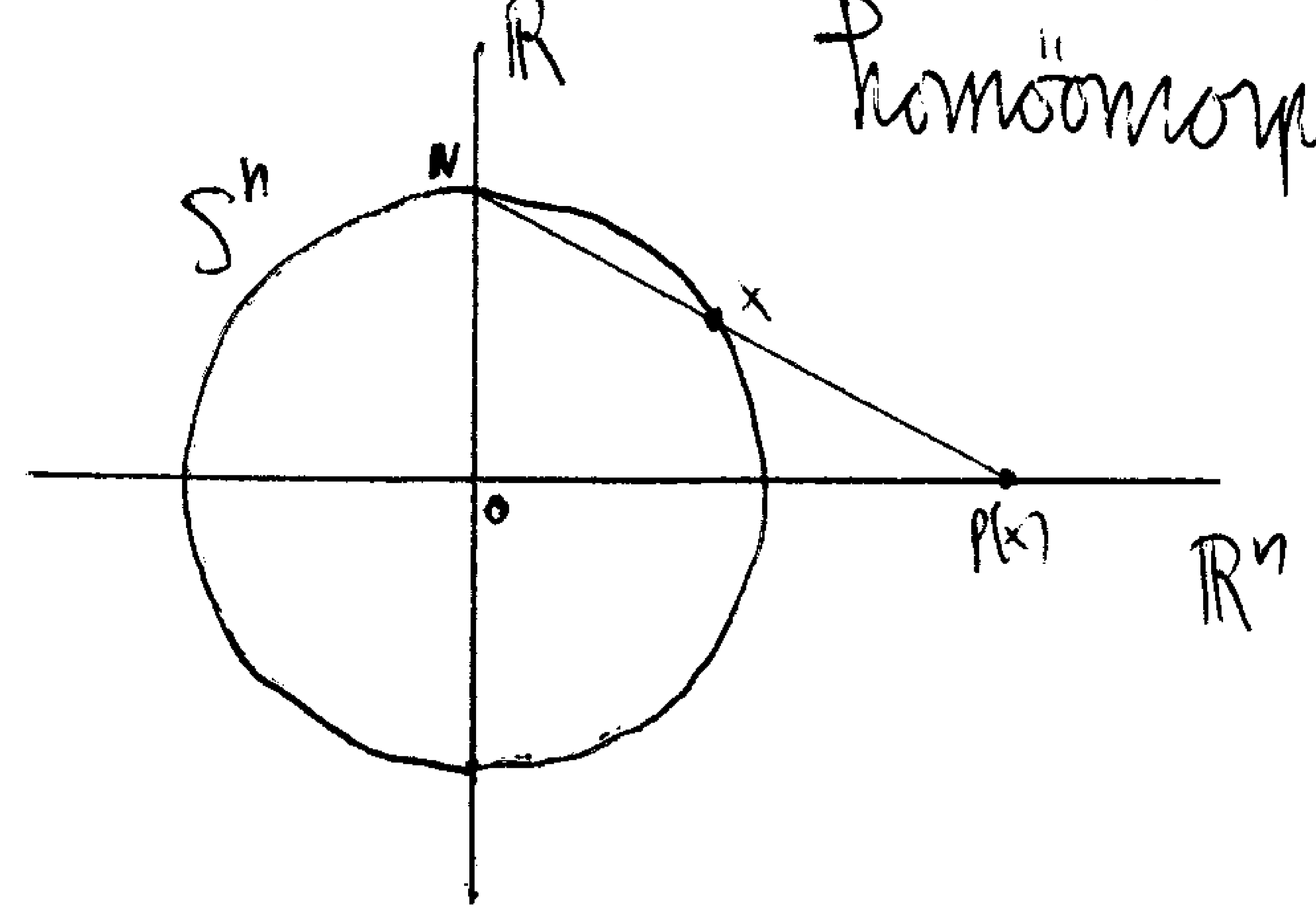
Beweis: Zu a). Schwer. Spezialfall $n \geq 2$ und $m = 1$.

Ang. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus.

Dann ist auch $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}$ ein Homöomorphismus (s. Lemma 8.5).

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ ist nicht wegzusammenhängend} \\ \mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\} \text{ ist wegzusammenhängend, denn } n \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lightning$ mit Koroll. 8.7.

Zu b): Sei $P \in S^n$. Wir zeigen zunächst, dass $S^n\setminus\{P\}$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind. OBdA, $P = N$ der Nordpol.



Die stereografische Projektion

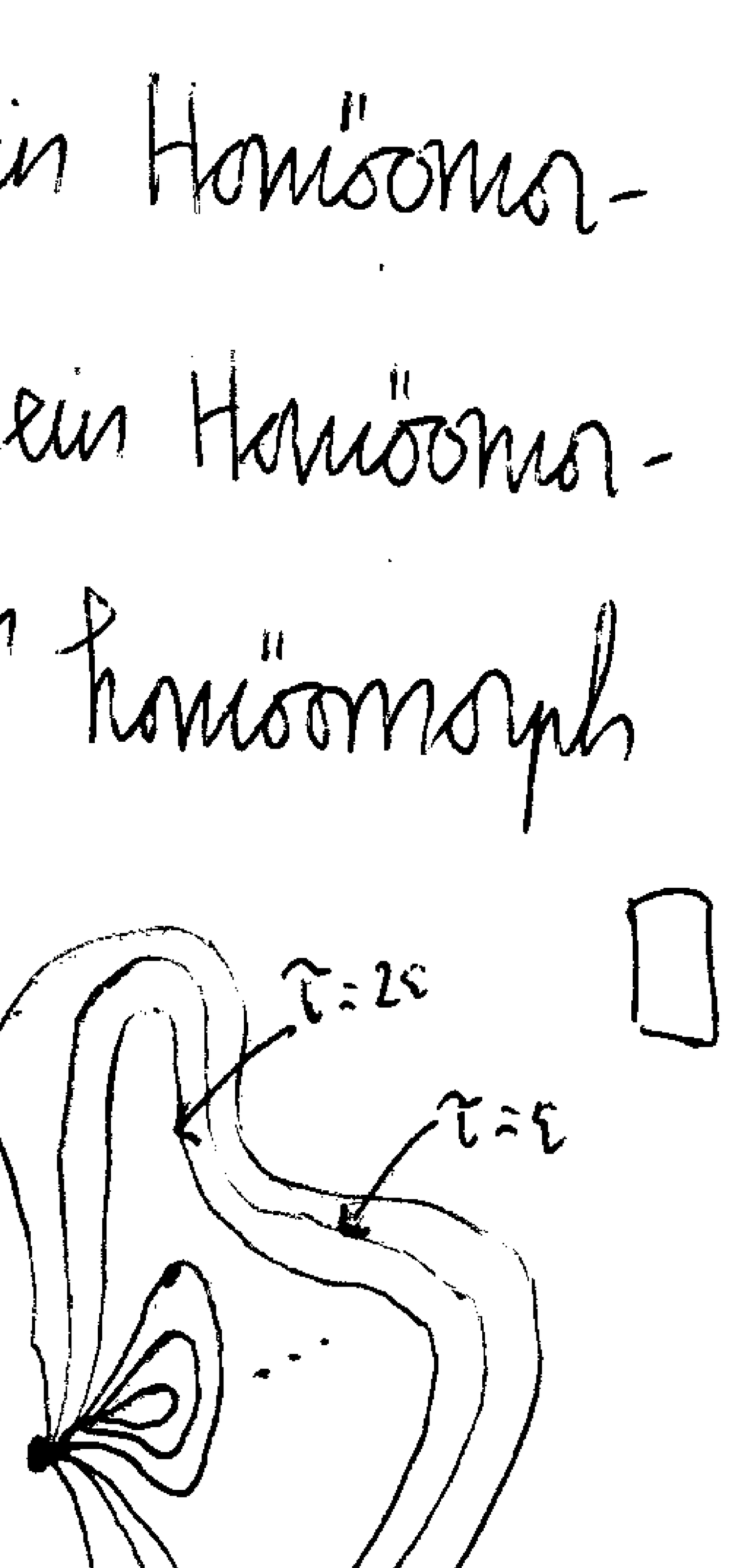
$$p: S^n\setminus\{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto p(x)$$

ist ein Homöomorphismus.

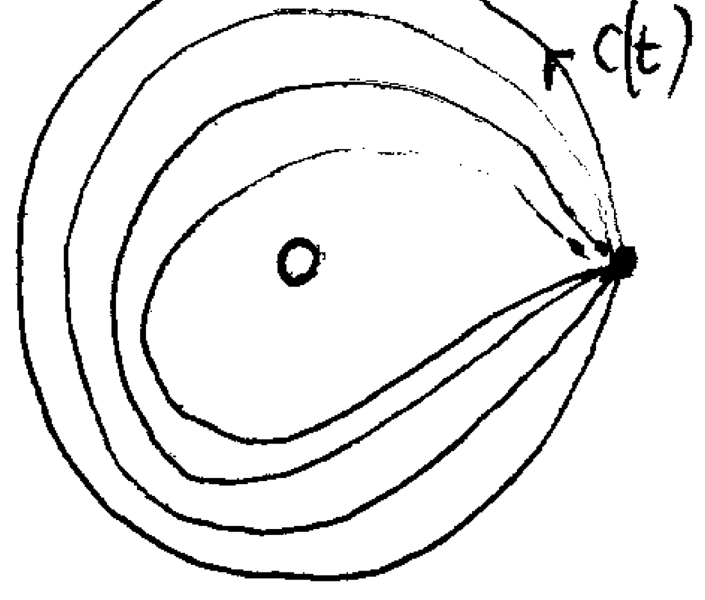
Ang. S^n und S^m sind homöomorph. Sei $f: S^n \to S^m$ ein Homöomorphismus. Dann ist auch $f|_{S^n\setminus\{N\}}: S^n\setminus\{N\} \to S^m\setminus\{f(N)\}$ ein Homöomorphismus (s. Lemma 8.5). Daraus folgt, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph sind. Nach a) folgt also $m = n$. □

Sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ homöomorph?

In $\mathbb{R}^2$: Jeder geschlossene Weg kann auf eine stetige Weise zu einem konstanten Weg (also ein Punkt) deformiert werden (*)



In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: (*) gilt nicht für den Weg $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$.



Man kann zeigen: Zu jedem wegzusammenhängenden Raum X kann eine Gruppe $\pi_1(X)$ zugeordnet werden, die Auskunft über kontinuierliche Deformationen von geschlossenen Wegen in X gibt. $\pi_1(X)$ heisst Fundamentalgruppe von X.

<u>Wichtigste Eigenschaft:</u> Wenn X und Y homöomorph sind, dann sind die Gruppen $\pi_1(X)$ und $\pi_1(Y)$ isomorph.

Man rechnet $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 0$ und $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$.

Daraus folgt, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht homöomorph sind.